УДК 512.761

МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА (РАЗРЕШЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ)

А. Г. Хованский

Многогранником Ньютона полинома, зависящего от нескольких переменных, называется выпуклая оболочка показателей мономов, входящих в полином с ненулевым коэффициентом. Многогранник Ньютона обобщает понятие степени и играет аналогичную роль. Дискретные характеристики совместной линии уровня нескольких полиномов в многомерном комплексном пространстве почти для всех значений коэффициентов одни и те же и вычисляются в терминах многогранников Ньютона. Среди вычисленных дискретных характеристик число решений системы n уравнений от n неизвестных, эйлерова характеристика, арифметический и геометрический род полных пересечений, числа Ходжа смешанной структуры Ходжа на когомологиях полных пересечений.

Многогранник Ньютона определяется не только для полиномов, но и для ростков аналитической функции. Для ростков аналитических функций общего положения с данными многогранниками Ньютона вычислены кратность совместного решения системы аналитических уравнений, число Милнора и дзета-функция оператора монодромии, асимптотика осциллирующих интегралов, числа Ходжа смешанной структуры Ходжа в исчезающих когомологиях, в двумерном случае и в многомерном квазиоднородном случае вычислена модальность ростка функции.

В ответах встречаются величины, характеризующие как размеры многогранников (объем, число целых точек, лежащих внутри многогранника), так и их комбинаторику (число граней различных размерностей, числовые характеристики их примыканий). Эти и другие результаты, связанные с многогранниками Ньютона, можно найти в работах [1—9, 11—16, 18—24, 26—28].

Большая часть вычислений с многогранниками Ньютона проводится с помощью торических многообразий. «Элементарные» вычисления, в которых удается обойтись без их помощи, являются скорее исключениями. Основной этап применения торических многообразий заключается в явном построении разрешения особенностей и последующей неособой компактификации совместной линии уровня нескольких полиномов, имеющих достаточно общие коэффициенты и фиксированные многогранники Ньютона. Предлагаемая статья посвящена торическим многообразиям, с точки зрения их приложений к разрешению особенностей и компактификации.

В первой половине статьи приводится подробное построение гладких торических многообразий. Обычно описание этих многообразий дается в терминах спектров колец, привычных в алгебраической геометрии и мало удобных для специалистов по математическому анализу. В нашем изложении весь алгебраический аппарат сводится к линейной алгебре и к простейшим свойствам целочисленной решетки.

Вторая половина статьи посвящена теоремам о компактификации и о разрешении особенностей. В первой из них (п. 2.4) предлагается неособая компактификация совместной линии уровня полиномов в группе T^n. Эта наиболее простая (и, пожалуй, наиболее применяемая) теорема была опубликована в [18]. Во второй теореме (п. 2.6) предлагается разрешение особенностей с последующей компактификацией совместной линии уровня полиномов в $\mathbf{C}^n$. В третьей (п. 2.7) предлагается разрешение особенностей ростка совместной линии уровня нескольких аналитических функций (случай гиперповерхности опубликован в [28]).

§ 1. Торические многообразия

1.1. Целочисленная решетка. Пусть в вещественном n-мерном пространстве $\mathbf{R}^{n*}$ задана целочисленная решетка (звездочка в обозначении стоит не случайно: в дальнейшем стереометрические конструкции будут производиться в пространстве, двойственном к основному пространству $\mathbf{R}^n$). Нам понадобятся простейшие свойства решетки. Векторы $a_1, \ldots, a_n$ называются базисом целочисленной решетки, если их целочисленные линейные комбинации порождают все целочисленные векторы.

Лемма 1. 1) Независимые целочисленные векторы образуют базис в решетке, если и только если параллелепипед $\Pi = \Sigma\lambda_i a_i$, $0 \leqslant \lambda_i < 1$, натянутый на эти вектора, не содержит целых точек, отличных от точки ноль. 2) Переход от одного базиса решетки к другому задается целочисленной матрицей с определителем, равным ± 1.

Доказательство. 1) Действительно, пространство $\mathbf{R}^{n*}$ есть непересекающееся объединение параллелепипедов Π_m, где $m = (m_1, \ldots, m_n)$ — целочисленные векторы, а Π_m состоит из векторов $\Sigma\lambda_i a_i$ при $m_i \leqslant \lambda_i < m_i + 1$. Все параллелепипеды Π_m различаются сдвигом на целочисленный вектор и содержат поэтому одинаковое число целых точек. Если это число больше 1, то $a_1, \ldots, a_n$ не образуют базис решетки. 2). Целочисленная матрица имеет целочисленную обратную, если и только если ее определитель равен ± 1.

Второе утверждение леммы 1 позволяет по решетке корректно определить элемент объема в $\mathbf{R}^{n*}$ таким образом, чтобы базисный параллелепипед имел единичный объем.

Набор целочисленных векторов $a_1, \ldots, a_k$ называется примитивным, если параллелепипед $\Pi = \Sigma\lambda_i a_i$, $0 \leqslant \lambda_i < 1$, не содержит целых точек, отличных от точки 0.

Лемма 2. Набор целочисленных векторов $a_1, \ldots, a_k$ примитивен, если и только если он дополняется до базиса решетки.

Доказательство. Пусть $a_{k+1}, \ldots, a_n$ — такие целочисленные векторы, что объем параллелепипеда, натянутого на $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$, имеет наименьшее возможное (целое) значение, отличное от нуля. Покажем, что это значение есть 1 (и, следовательно, что набор векторов является базисом решетки). Действительно, если это не так, то параллелепипед $\overset{n}{\Sigma}\lambda_i a_i$ при $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$ содержит некоторую целую точку b. Заменяя один из векторов $a_{k+1}, \ldots, a_n$ на вектор b, мы уменьшим объем параллелепипеда.

Лемма 3. В k-мерной плоскости, в которой существует целочисленный базис, существует и примитивный базис.

Лемма 3 доказывается аналогично лемме 2.

1.2. Конические полиэдры и их подразбиения. Рациональным конусом в $\mathbf{R}^{n*}$ называется конус, образованный линейными комбинациями с неотрицательными коэффициентами конечного числа целочисленных векторов.

Известно, что совокупность решений конечного числа линейных уравнений $\langle x, m_i \rangle = 0$ и неравенств $\langle x, m_j \rangle \geqslant 0$ с целыми коэффициентами является рациональным конусом. Конус называется заостренным, если он не содержит линейного подпространства. Рациональный конус имеет конечное число граней (в число граней заостренного конуса включается нульмерная грань — вершина конуса). Одномерные грани называются ребрами. Набор несократимых целочисленных векторов, лежащих на ребрах заостренного рационального конуса, называется базисом конуса. Грань заостренного конуса определяется набором своих ребер.

Симплициальным конусом называется заостренный рациональный конус, число ребер которого равно его размерности. Симплициальный конус называется примитивным, если его базис примитивен. Кратностью k-мерного симплициального конуса называется объем параллелепипеда, натянутого на его базис. (Объем вычисляется в k-мерной плоскости, содержащей конус, элемент объема в которой определяется целочисленной решеткой). Симплициальный конус примитивен, если и только если он имеет кратность 1.

Коническим полиэдром называется набор конечного числа заостренных рациональных конусов, в котором любые два конуса могут пересекаться лишь по граням и в котором вместе с каждым конусом содержатся все его грани.

Основной пример. С целочисленным многогранником Δ полной размерности $\dim \Delta = n$, лежащим в пространстве $\mathbf{R}^n$, связан двойственный конический полиэдр Δ^* в пространстве $\mathbf{R}^{n*}$. Вот его определение. С вектором $a \in \mathbf{R}^{n*}$ связана грань Δ^a многогранника Δ, на которой скалярное произведение векторов, лежащих в Δ, с вектором a минимально. Два вектора $a, b \in \mathbf{R}^{n*}$ назовем эквивалентными, если связанные с ними грани совпадают, т. е. $\Delta^a = \Delta^b$. Замыкание класса эквивалентности векторов, связанных с гранью Δ_i, образует рациональный конус в $\mathbf{R}^{n*}$, который называется двойственным к грани Δ_i. Совокупность конусов, двойственных всем граням многогранника Δ, образует конический полиэдр, называемый двойственный к многограннику Δ и обозначаемый Δ^*. В коническом полиэдре Δ^* k-мерной грани многогранника Δ соответствует двойственный $(n-k)$-мерный конус. Так самому многограннику Δ (который рассматривается как n-мерная грань) соответствует конус, состоящий из одной точки 0 в $\mathbf{R}^{n*}$. Каждой $(n-1)$-мерной грани соответствует луч в $\mathbf{R}^{n*}$, ортогональный этой грани и «направленный внутрь многогранника Δ», и т. д.

С коническим полиэдром K связано подмножество $|K|$, лежащее в $\mathbf{R}^{n*}$ и являющееся объединением конусов, задающих K. Конический полиэдр K определяется не только множеством $|K|$, но и способом разбиения этого множества на рациональные конусы. Скажем, что конический полиэдр M является подразбиением полиэдра K, если $|M| = |K|$ и каждый конус конического полиэдра M лежит внутри некоторого конуса конического полиэдра K. Конический полиэдр называется симплициальным, если он образован набором симплициальных конусов, и примитивным, если он образован набором примитивных конусов. Примитивное подразбиение полиэдра называется простым, если ни один примитивный конус исходного конического полиэдра не подразбивается.

Теорема 1. У всякого конического полиэдра существует простое подразбиение.

Замечание. В книге [25] доказано, что у всякого конического полиэдра существует примитивное подразбиение. Предложенный в [25] алгоритм, на самом деле, приводит к простому подразбиению, однако это уточнение в [25] не сформулировано. Формулировку этого весьма полезного уточнения я узнал от А. Н. Варченко.

Доказательство теоремы 1 состоит из двух шагов. На первом шаге доказывается вариант теоремы, в котором примитивные подразбиения заменены симплициальными. Второй шаг заключается в примитивном подразбиении симплициальных конусов.

Шаг 1. Фиксируем ребро одного из конусов конического полиэдра. Сделаем следующую операцию: натянем конуса на это ребро и каждую грань всех содержащих это ребро конусов конического полиэдра. Мы получим подразбиение полиэдра, у которого те же ребра, что и у исходного конического полиэдра. Если у полученного подразбиения есть ребро, для которого описанная операция нетравиальна, сделаем эту операцию и т. д. За конечное число шагов мы должны остановиться, т. к. из фиксированного числа ребер можно составить лишь конечное число конических полиэдров. Получим искомое симплициальное разбиение.

Шаг 2. Пусть среди симплициальных конусов разбиения есть конусы кратности, большей 1. Возьмем один из конусов наибольшей кратности. Такой конус должен содержать целочисленный вектор, все координаты разложения которого по базису конуса меньше единицы. Натягивая симплициальные конуса на этот вектор и все грани всех конусов, содержащих этот вектор (исключая, конечно, ту грань, строго внутри которой лежит вектор), мы получим подразбиение, в котором меньше конусов максимальной кратности. Продолжая этот процесс, уничтожим все конусы наибольшей кратности. Затем уничтожим конуса следующей кратности и т. д.

Замечание. Доказательство теоремы 1 содержит явный алгоритм простого разбиения конического полиэдра.

1.3. Тор, его характеры и однопараметрические. Обозначим через $\mathbf{C}_0^n$ n-мерное комплексное пространство с координатами $z_1, \ldots, z_n$, из которого выкинуты все координатные плоскости, т. е. $z \in \mathbf{C}_0^n$, если $z_1 \neq 0, \ldots, z_n \neq 0$. Пространство $\mathbf{C}_0^n$ вместе с операцией покомпонентного умножения является группой. Эта алгебраическая коммутативная группа называется n-мерным (комплексным) тором и обозначается через T^n. Группу T^n с фиксированной системой координат $z_1, \ldots, z_n$ будем называть стандартным тором.

Характер χ тора (точнее алгебраический характер тора) — это алгебраический гомоморфизм тора T^n в одномерный тор, $\chi: T^n \to T^1$. В координатной записи каждый характер является мономом, т. е. функцией вида $z_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{m_n}$, где m_i — целые числа (не обязательно положительные). Будем нумеровать мономы при помощи целых векторов $m = (m_1, \ldots, m_n)$ фиксированного вещественного пространства $\mathbf{R}^n$ и использовать краткую запись $z_1^{m_1} \cdot, \ldots$ $\ldots, \cdot z_n^{m_n} = z^m$. Соответствующий характер будем обозначать χ^m. Характеры образуют группу относительно умножения. Нумерация задает изоморфизм этой группы с целочисленной решеткой пространства $\mathbf{R}^n$.

Рассмотрим группу алгебраических однопараметрических подгрупп, т. е. алгебраических гомоморфизмов $\lambda: T^1 \to T^n$. Каждый такой гомоморфизм в координатной записи имеет вид $z_1 = t^{a_1}, \ldots, z_n = t^{a_n}$, где a_i — целые, или, кратко, $z = t^a$. Мы нумеруем однопараметрические λ точками a целочисленной решетки пространства $\mathbb{R}^{n*}$.

Между однометрическими λ и характерами χ есть скалярное умножение, равное степени сквозного гомоморфизма $\chi \cdot \lambda$: $T^1 \to T^1$. Скалярное произведение характера χ^m и однопараметрической λ^a равно $\Sigma a_i m_i$, где a_i и m_i — координаты целочисленных векторов a и m. Это скалярное произведение продолжается на пространства $\mathbb{R}^{n*}$ и $\mathbb{R}^n$ и задает двойственность между ними (для этого скалярного произведения степень $\chi^m \cdot \lambda^a : T^1 \to T^1$ равна $\langle a, m \rangle$).

Рассмотрим асимптотическое поведение кривой в торе. Пусть $z: (C \setminus 0) \to T^n$ — росток мероморфной кривой в торе, и пусть старшие члены разложения этой кривой имеют вид $z_i(t) = c_i t^{a_i}(1 + O(t))$. Пользуясь операцией умножения в T^n, старшие члены разложения можно записать более коротко, именно: $z(t) = Ct^a(1 + O(t))$, где $C = c_1, \ldots, c_n$ — вектор коэффициентов $a \in \mathbb{R}^{n*}$ и $a \in \mathbb{R}^{n*}$ — вектор степеней $a = a_1, \ldots, a_n$. Для нас важную роль будет играть следующее простое вычисление.

Утверждение. Пусть χ^m — характер тора и $z(t) = Ct^a(1 + O(t))$ — росток мероморфной кривой в торе. Тогда $\lim\limits_{t \to 0} \chi^m(z(t))$ явно вычисляется. Именно, он равен $\chi^m(C)$, если $\langle a, m \rangle = 0$, он равен нулю, если $\langle a, m \rangle > 0$, и он равен бесконечности, если $\langle a, m \rangle < 0$.

Действительно, $\chi^m(Ct^a(1 + O(t))) = \chi^m(C) \cdot \chi^m(t^a) \cdot \chi^m(1 + O(t))$. Далее $\lim\limits_{t \to 0} \chi^m(1 + O(t)) = 1$, а $\chi^m(t^a)$ стремится к единице, нулю или к бесконечности, соответственно, если $\langle a, m \rangle = 0$, если $\langle a, m \rangle > 0$ и если $\langle a, m \rangle \leqslant 0$.

Если целочисленной прямой в $\mathbb{R}^{n*}$ соответствует одномерная подгруппа тора, то многомерной целочисленной плоскости в $\mathbb{R}^{n*}$ соответствует многомерная подгруппа.

Плоскость в $\mathbb{R}^{n*}$ называется целочисленной, если она порождается лежащими на ней целыми векторами. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — примитивный набор векторов в k-мерной плоскости π. Определим k-мерную подгруппу $T(\pi)$ тора T^n как множество точек тора вида $z = t_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot t_k^{a_k}$, где $t_1, \ldots, t_k$ — произвольный набор ненулевых комплексных чисел. В определении группы $T(\pi)$ участвует не только плоскость π, но и примитивный набор векторов. Легко видеть, однако, что группа $T(\pi)$ не зависит от выбора примитивного набора. Фиксация этого набора задает изоморфизм группы $T(\pi)$ со стандартным k-мерным тором T^k.

Обозначим через $\Phi(\pi)$ факторгруппу тора по подгруппе $T(\pi)$. Группа $\Phi(\pi)$ изоморфна $(n-k)$-мерному тору. Действительно, пусть векторы $a_{k+1}, \ldots, a_n$ дополняют векторы $a_1, \ldots$ $\ldots, a_k$ до базиса решетки. Факторгруппа $\Phi[\pi]$ изоморфна подгруппе точек тора вида $z = t_{k+1}^{a_{k+1}} \cdot \ldots \cdot t_n^{a_n}$.

1.4. Торические многообразия (как множества точек). С каждым коническим полиэдром в пространстве $\mathbf{R}^{n*}$ однопараметрических тора связано некоторое алгебраическое многообразие [25]. Это многообразие не имеет особенностей, если и только если конический полиэдр примитивен. Особые многообразия нам понадобятся. Приступим к описанию неособых многообразий. Сначала мы опишем множества точек таких многообразий и лишь затем введем на этих множествах структуру аналитического многообразия.

Пусть K — примитивный конический полиэдр в пространстве $\mathbf{R}^{n*}$ однопараметрических тора и $\{\sigma_i\}$ — набор его примитивных конусов, $K = \bigcup\{\sigma_i\}$. С каждым конусом σ_i свяжем группу $\Phi[\sigma_i]$ следующим образом: положим $\Phi[\sigma_i]$ равной группе $\Phi(\pi(\sigma_i))$, где $\pi(\sigma_i)$ — целочисленная плоскость, порожденная конусом σ_i.

Определение 1. Множеством точек торического многообразия M_K, соответствующего примитивному коническому полиэдру K, называется несвязное объединение факторгрупп $\Phi[\sigma_i]$, где $\{\sigma_i\}$ — набор симплициальных конусов полиэдра K.

На множестве M_K естественным образом действует группа тор. Орбитами этого действия являются факторгруппы $\Phi[\sigma_i]$.

Итак, каждому симплициальному конусу σ (вещественной) размерности k в множестве M_K соответствует тор $\Phi[\sigma]$ (комплексной) размерности $n-k$. Каждое многообразие M_K содержит ровно один n-мерный тор T^n, он соответствует точке 0 — вершине всех конусов σ_i. Многообразие M_K содержит ровно столько $(n-1)$-мерных торов, сколько одномерных конусов присутствует в коническом полиэдре K, и т. д.

Отметим, что одна и та же группа может несколько раз входить в множество M_K: если плоскости, порожденные конусами σ_1 и σ_2, совпадают, то совпадают и группы $\Phi[\sigma_1]$ и $\Phi[\sigma_2]$. Но в множестве M_K в этом случае присутствует и $\Phi[\sigma_1]$, и $\Phi[\sigma_2]$.

Пока множество точек M_K является никак не связанным конгломератом, состоящим из группы T^n и набора его факторгрупп $\Phi[\sigma_i]$. Позже на этом множестве будет введена структура аналитического многообразия. Забегая вперед, сформулируем утверждение (которое мы позже докажем, а пока не будем использовать), необходимое для интуитивного представления ситуации. Рассмотрим в торе T^n сдвинутую однопараметрическую Ct^a. При $t \to 0$ эта однопараметрическая будет сходиться в M_K к точке $c \in \Phi[\sigma_i]$, если и только если вектор степени a лежит строго внутри конуса σ_i (т. е. не лежит на его грани), а коэффициент C переходит в c при факторизации $\rho: T^n \to \Phi[\sigma_i]$.

Гочку c факторгруппы $\Phi[\sigma_i]$ нужно представлять себе как предел при $t \to 0$ линии Ct^a.

Определение 2. Орбита $\Phi[\sigma_1]$ называется примыкающей к орбите $\Phi[\sigma_2]$, если σ_1 — грань конуса σ_2 (орбита $\Phi[\sigma_1]$ имеет большую размерность, чем $\Phi[\sigma_2]$).

Топология на множестве M_K (см. п. 1.6.) устроена таким образом, что одна орбита примыкает ко второй, если и только если вторая орбита лежит в замыкании первой.

Основной пример. Пусть Δ — n-мерный целочисленный многогранник в $\mathbf{R}^n$, для которого двойственный полиэдр Δ^* в пространстве $\mathbf{R}^{n*}$ является примитивным. Пусть M_{Δ^*} — торическое многообразие, построенное по этому разбиению. Множество орбит многообразия M_{Δ^*} находится во взаимно однозначном соответствии с множеством граней многогранника Δ. При этом граням вещественной размерности k соответствуют орбиты комплексной размерности k, и орбиты примыкают друг к другу, если и только если примыкают друг к другу соответствующие им грани (сам многогранник рассматривается как n-мерная грань; ему соответствует в M_{Δ^*} n-мерный тор T^n).

Пусть K_1 и K_2 — два примитивных конических полиэдра, причем, внутренность каждого конуса полиэдра K_1 принадлежит внутренности некоторого конуса полиэдра K_2 (внутренность конуса, натянутого на векторы $a_1, \ldots, a_k$, это множество $\sum \lambda_i a_i$, где $\lambda_i > 0$). В этих условиях определим отображение $g: M_{K_1} \to M_{K_2}$.

Поставим в соответствие конусу σ_1 полиэдра K_1 наименьший конус σ_2 полиэдра K_2, содержащий конус σ_1.

Существует естественный гомоморфизм факторгруппы $\Phi[\sigma_1]$ в группу $\Phi[\sigma_2]$ (так как плоскость, содержащая конус σ_2 содержит и конус σ_1). Определим отображение $g: M_{K_1} \to M_{K_2}$ как объединение этого конгломерата гомоморфизмов.

Замечание 1. Интуитивное обоснование этого определения следующее. Точку $c \in \Phi[\sigma_1]$ нужно представить себе как предел сдвинутой однопараметрической. Отображение g точке c ставит в соответствие предел той же однопараметрической в M_{K_2}.

Пусть $g: M_{K_1} \to M_{K_2}$ — определенное выше отображение и $\Phi[\sigma]$ — одна из орбит в M_{K_2}. Отображение взаимно однозначно переводит подмножество $g^{-1}\Phi[\sigma]$ в орбиту $\Phi[\sigma]$, если и только если среди конусов полиэдра K_1 присутствует конус σ.

1.5. Структура аналитического многообразия. Случай симплициального конуса.

Начнем с определения структуры аналитического многообразия для простейшего конического полиэдра $\bar{\sigma}$, состоящего из k-мерного примитивного конуса σ и всех его граней. Сначала на множестве точек $M_{\bar{\sigma}}$ будет определен некоторый запас функций. Координатные функции в разных картах многообразия $M_{\bar{\sigma}}$ будут выбираться из этого запаса. Начнем со стереометрии.

Двойственный конус $\sigma^* \subset \mathbf{R}^n$ к конусу $\sigma \subset \mathbf{R}^{n*}$ определяется как множество векторов $x \in \mathbf{R}^n$, для которых $\langle a, x \rangle \geqslant 0$ для всех $a \in \sigma$. Двойственный конус к k-мерному конусу содержит $(n-k)$-мерное подпространство. Набор целочисленных векторов $m_1, \ldots, m_n$ называется базисом конуса σ^*, если он является базисом решетки в $\mathbf{R}^n$ и всякий вектор конуса σ^* представим в виде $\Sigma \lambda_i m_i$, где числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — неотрицательные, а $\lambda_{k+1}, \ldots \ldots, \lambda_n$ — произвольные вещественные числа.

Утверждение 1. У конуса, двойственного к примитивному, существует базис (при $k<n$ базис определяется неоднозначно). Если $a_1, \ldots, a_k$ — базис примитивного конуса σ, то набор векторов $\{m\}$ базиса двойственного конуса σ^* можно перенумеровать так, что $\langle a_i, m_j \rangle = \delta_{i,j}$, где i изменяется от 1 до k, а j — от 1 до n.

Для доказательства утверждения нужно дополнить примитивный набор векторов $a_1, \ldots, a_k$ до базиса, и конус σ^* рассмотреть в координатах двойственного пространства, равных скалярным произведениям с базисными векторами.

Пусть $m \in \sigma^*$ и χ^m — характер с номером m. Функция χ^m определена на торе T^n. Сейчас мы определим функцию $\chi^{\frac{m}{\sigma}}$, продолжающую χ^m на $M_{\overline{\sigma}}$.

Определение. На торе T^n функция $\chi^{\frac{m}{\sigma}}$ полагается равной χ^m. На орбите $\Phi[\sigma_l]$, где σ_l — грань σ, $\chi^{\frac{m}{\sigma}}$ полагается равной нулю, если для некоторого (и значит для любого) вектора a, лежащего внутри грани σ_l, справедливо неравенство $\langle a, m \rangle > 0$. В противном случае функция χ^m постоянна на классах эквивалентности в T^n, соответствующих точкам факторгруппы $\Phi[\sigma_l]$. Функция определяется в этом случае как значение χ^m на соответствующем классе эквивалентности.

Лемма 1. Пусть c — точка факторгруппы $\Phi[\sigma_l]$, C — точка тора T^n, переходящая в c при гомоморфизме факторизации, a — вектор, лежащий строго внутри конуса σ_l. Тогда для всякого характера χ^m при $m \in \sigma^*$ справедливо равенство

$$\lim_{t \to \infty} \chi^m (Ct^a) = \chi^{\frac{m}{\sigma}} (c).$$

Доказательство леммы немедленно вытекает из вычисления в п. 1.3. Отметим, что лемма 1 вполне согласуется с представлением о точках орбиты $\Phi[\sigma_l]$ как о пределах сдвинутых однопараметрических.

Лемма 2. Доопределенные функции удовлетворяют тем же соотношениям, что и исходные, точнее, справедливы равенства $\chi^{\frac{m+l}{\sigma}} = \chi^{\frac{m}{\sigma}} \cdot \chi^{\frac{l}{\sigma}}$, где $m, l \in \sigma^*$.

Доказательство. Предел произведения равен произведению пределов.

Обозначим через $\mathbf{C}_k{}^n$ область в стандартном координатном пространстве $\mathbf{C}^n$ с координатами $z_1, \ldots, z_n$, определенную неравенствами $z_{k+1} \neq 0, \ldots, z_n \neq 0$.

Построим взаимнооднозначное отображение множества $M_{\sigma}^{\prime}$ в $\mathbf{C}_k^n$, которое играет роль системы координат в $M_{\bar{\sigma}}$. Это отображение будет построено по базису A в конусе σ^*. Пусть $A=\{m_1, \ldots, m_n\}$ — базис в σ^*, причем $\langle a_i, m_j \rangle = \delta_{i,j}$, где $a_1, \ldots, a_k$ — базис конуса σ.

Определение. Координатным отображением $f_A: M_{\bar{\sigma}} \to \mathbf{C}_k^n$ называется отображение, которое переводит точку $c \in M_{\bar{\sigma}}$ в точку с координатами $\chi_{\bar{\sigma}}^{m}(c), \ldots, \chi_{\bar{\sigma}}^{m_n}(c)$.

Лемма 3. 1) Пусть $I \in (1, \ldots, k)$ — подмножество индексов и σ_I — грань, натянутая на векторы a_i, $i \in I$. Отображение f_A устанавливает взаимно однозначное соответствие между факторгруппой $\Phi[\sigma_I[$ и множеством, определенным в $\mathbf{C}_k^n$ уравнениями $z_i=0$ при $i \in I$ и неравенствами $z_j \neq 0$ при $j \notin I$. 2) Отображение f_A задает взаимно однозначное соответствие между $M_{\bar{\sigma}}$ и $\mathbf{C}_k^n$.

Доказательство. 1) Характеры $\chi_{\bar{\sigma}}^{m_i}$ при $i \in I$ на орбите $\Phi[\sigma_I]$ равны нулю, так как $\langle a_i, m_i \rangle = 1$, и, следовательно, $\langle x, m_i \rangle > 0$, если x лежит внутри конуса σ_I. Оставшиеся характеры χ^{m_j}, $j \notin I$, постоянны на подгруппе $T(\pi(\sigma_I))$ и разделяют классы эквивалентности по этой подгруппе, так как набор A образует базис решетки. 2) Суммируя образы всех факторгрупп, получаем нужное утверждение.

В области $\mathbf{C}_k^n$, определенной в $\mathbf{C}^n$ неравенствами $z_{k+1} \neq 0, \ldots, z_n \neq 0$, регулярны мономы $z_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot z_k^{m_k} \cdot z_{k+1}^{m_{k+1}} \cdot \ldots \cdot z_n^{m_n}$, у которых степени по первым k переменным неотрицательны, т. е. $m_1 \geqslant 0, \ldots, m_k \geqslant 0$.

Лемма 4. Прообразы регулярных мономов в области $\mathbf{C}_k^n$ при отображении $f_A: M_{\bar{\sigma}} \to \mathbf{C}_k^n$ — это все характеры $\chi_{\bar{\sigma}}^{m}$, где $m \in \sigma^*$, и только они.

Доказательство. Целочисленный вектор принадлежит конусу σ^*, если и только если первые k координат его разложения по базису A неотрицательны.

Лемма 5. Пусть $f_B: M_{\bar{\sigma}} \to \mathbf{C}_k^n$ — взаимно однозначное отображение, связанное с набором B базисных векторов в σ^*. Тогда отображение $f_B f_A^{-1}: \mathbf{C}_k^n \to \mathbf{C}_k^n$ бианалитично.

Доказательство. Пусть z_i — координатная функция в $\mathbf{C}_k^n$. Функция $f_B^* z_i$ — это один из характеров $\chi_{\bar{\sigma}}^{m}$, где $m \in \sigma^*$. Поэтому $(f_A^{-1})^* f_B^* z_i$ — регулярный моном в области $\mathbf{C}_k^n$. Поэтому отображение $f_B f_A^{-1}$ аналитично. Обратное отображение аналитично по тем же причинам.

Введем на $M_{\bar{\sigma}}$ структуру аналитического многообразия при помощи взаимно однозначного отображения $f_A^{-1}: \mathbf{C}_k^n \to M_{\bar{\sigma}}$.

Предыдущее утверждение показывает, что структура определена корректно (не зависит от выбора базиса в конусе σ^*).

Пусть $z(t)=Ct^a(1+O(t))$ — росток мероморфной кривой в торе T^n. Теперь, когда уже введена аналитическая структура на $M_{\bar\sigma}$, утверждение о поведении кривой $z(t)$ при $t\to 0$, о котором говорилось в пункте 1.4., нужно доказывать.

Лемма 6. 1) Если вектор степени a кривой не лежит в конусе σ, то на многообразии $M_{\bar\sigma}$ существует аналитическая функция, ограничение которой на кривую стремится к ∞ при $t\to 0$, 2) если вектор степени a лежит в конусе σ, то кривая при $t\to 0$ имеет предел в $M_{\bar\sigma}$, именно: если a лежит внутри грани σ_l конуса σ, то предел лежит в $\Phi[\sigma_l]$ и равен образу точки C в группе $\Phi[\sigma_l]$ при гомоморфизме факторизации.

Доказательство. Если a не лежит в конусе σ, то в конусе σ^* найдется вектор m такой, что $\langle a, m\rangle < 0$. Характер χ^m аналитически продолжается на $M_{\bar\sigma}$ (это продолжение есть $\chi^m_{\bar\sigma}$). Предел при $t\to 0$ $\chi^m(z(t))$ равен бесконечности, так как $\langle a, m\rangle < 0$. Это доказывает первое утверждение леммы. Пусть a лежит в грани σ_l конуса σ. Базисные характеры χ^{m_i} при $i\in I$ постоянны на подгруппе $T(\pi(\sigma_l))$ и $\lim\limits_{t\to 0}\chi^{m_i}(z(t))=\chi^{m_i}(C)$. Это доказывает второе утверждение леммы.

Лемма 7. Каждый характер χ^m на торе мероморфно продолжается на многообразие $M_{\bar\sigma}$. Соответствующая мероморфная функция $\chi^m_{\bar\sigma}$ регулярна на $M_{\bar\sigma}$, если и только если $m\in\sigma^*$.

Доказательство. Каждый целочисленный вектор в $\mathbf{R}^m$ является разностью двух целочисленных векторов, лежащих в конусе σ^*. Поэтому каждый характер на торе совпадает с отношением двух голоморфных функций на $M_{\bar\sigma}$. Далее, если $m\notin\sigma^*$, то существует целочисленный вектор $a\in\sigma$ такой, что $\langle a, m\rangle < 0$. Функция χ^m вдоль однопараметрической t^a при $t\to 0$ будет стремиться к бесконечности. Кривая t^a при $t\to 0$ имеет предел в $M_{\bar\sigma}$. Значит, функция χ^m не регулярна.

Лемма 8. Пусть σ_1 — грань конуса σ. Аналитические структуры, введенные в множествах $M_{\bar\sigma_1}$ и $M_{\bar\sigma}$, согласованы, т. е. вложение $g: M_{\bar\sigma_1}\to M_{\bar\sigma}$ аналитично.

Доказательство. Базис A конуса σ^* является одновременно базисом конуса $\sigma_1{}^*$ (но некоторые из базисных векторов конуса σ^*, необратимые в этом конусе, обратимы в конусе $\sigma_1{}^*$).

Карта многообразия $M_{\bar\sigma_1}$, связанная с базисом A, получается из карты многообразия M_σ выбрасыванием нескольких координатных гиперплоскостей (эти гиперплоскости соответствуют векторам базиса A, необратимым в конусе σ^*, но обратимым в конусе $\sigma_1{}^*$).

Лемма 9. Пусть конус σ_1 находится внутри другого конуса σ_2. Тогда отображение $g: M_{\bar{\sigma}_1} \to M_{\bar{\sigma}_2}$ аналитично.

Доказательство. Двойственные конусы связаны обратным включением $\sigma_1{}^* \supseteq \sigma_2{}^*$. Рассмотрим любой характер χ^m, где $m \in \sigma_2{}^*$. Справедливо равенство $g^* \chi^m_{\bar{\sigma}_2} = \chi^m_{\bar{\sigma}_1}$. Действительно, возьмем произвольную сдвинутую однопараметрическую, входящую в точку $c \in M_{\bar{\sigma}_1}$. Тогда та же однопараметрическая в $M_{\bar{\sigma}_2}$ будет входить в точку $g(c)$. На сдвинутой однопараметрической функции $\chi^m_{\bar{\sigma}_1}$ и $\chi^m_{\bar{\sigma}_2}$ совпадают с характером χ^m. Переходя к пределу, получим нужное равенство. Утверждение доказано, так как набор координатных функций в $M_{\bar{\sigma}_2}$ выбирается среди функций $\chi^m_{\bar{\sigma}_2}$ при $m \in \sigma_2{}^*$.

1.6. Структура аналитического многообразия (общий случай). Переходим к определению аналитической структуры на множестве M_K. С каждым примитивным конусом σ конического полиэдра K связан конический полиэдр $\bar{\sigma}$, набор конусов которого входит в набор конусов конического полиэдра K. Множество $M_{\bar{\sigma}}$ поэтому отождествляется с подмножеством в M_K. В каждом подмножестве $M_{\bar{\sigma}}$ уже введена аналитическая структура. Эти аналитические структуры согласованы. Действительно, общая часть множеств $M_{\bar{\sigma}_1}$ и $M_{\bar{\sigma}_2}$ есть $M_{\bar{\sigma}_3}$, где $\sigma_3 = \sigma_1 \cap \sigma_2$, а вложения аналитического многообразия $M_{\bar{\sigma}_3}$ в $M_{\bar{\sigma}_1}$ и в $M_{\bar{\sigma}_2}$ являются аналитическими (см. лемму 8 из п. 1.5.). Определим теперь топологию на M_K следующим образом: множество $U \subset M_K$ назовем открытым, если и только если открыты пересечения U со всеми подмножествами $M_{\bar{\sigma}}$. Открытых множеств достаточно много: образ открытого множества в каждой карте $M_{\bar{\sigma}}$ будет открытым во всем многообразии M_K (это вытекает из согласованности топологий разных карта). Итак, все происходящее в малой окрестности точки многообразия M_K можно рассматривать в любой из содержащих ее карт.

Замечание. При склеивании аналитических многообразий могут получаться множества с плохой топологией. Вот простейший пример. Отождествим у двух экземпляров комплексной прямой все точки, за исключением начал координат (полученное можество можно представлять как комплексную прямую с дублированным началом координат). На этом множестве есть две карты с согласованными аналитическими структурами, однако, любые две окрестности дублей начала координат пересекаются. Отметим, что в рассмотренном множестве есть аналитическая кривая, имеющая два разных предела.

Докажем, что в множестве M_K любые две точки имеют непересекающиеся окрестности (или, другими словами, что топология в множестве M_K хаусдорфова). Доказательство основано на том, что мероморфная кривая в M_K имеет не более одного предела.

Лемма 1. Пусть $z(t)=Ct^a(1+O(t))$ — росток мероморфной кривой в торе T^n и M_K — торическое многообразие, построенное по коническому полиэдру K. Тогда, если вектор a степени кривой лежит в множестве $|K|$, то кривая $z(t)$ при $t\to 0$ имеет в M_K единственный предел. Этот предел лежит в орбите $\Phi[\sigma]$, где σ — конус полиэдра, строго внутри которого лежит вектор a, и равен образу C в группе $\Phi[\sigma]$ при гомоморфизме факторизации. Если $a\notin|K|$, то при $t\to 0$ кривая $z(t)$ не имеет предельных точек в M_K.

Доказательство немедленно получается из рассмотрения кривой $z(t)$ в картах $M_{\overline{\sigma}}$, проведенного в лемме 6 из п. 1.5 Для нас будет играть важную роль следующий вариант известной в алгебраической геометрии теоремы об отборе кривых.

Теорема (об отборе однопараметрических). Пусть $\{\chi^m\}$ — конечное множество характеров тора. Пусть в торе T^n дана последовательность точек, вдоль которых все характеры из конечного множества стремятся к пределам (конечным и бесконечным). Тогда найдется сдвинутая однопараметрическая Ct^a, вдоль которой все характеры стремятся к тем же пределам при $t\to 0$.

Лемма 2. Пусть дано конечное множество вещественных линейных функций на $\mathbb{R}^{n*}$. Пусть в $\mathbb{R}^{n*}$ задана последовательность точек, вдоль которых все линейные функции из множества стремятся к пределам (конечным и бесконечным). Тогда существует сдвинутый луч $p\tau+q$, где p, $q\in\mathbb{R}^{n*}$ и $\tau\in\mathbb{R}$, вдоль которого линейные функции стремятся к тем же пределам при $\tau\to-\infty$. Если все линейные функции имеют целые коэффициенты, то вектор p можно выбрать целочисленным.

Доказательство. Пусть $\{l_i\}$, $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ — подмножества линейных функций, которые вдоль последовательности стремятся, соответственно, к $+\infty$, и к $-\infty$ и к конечным пределам. Обозначим через σ конус, определенный неравенствами $l_i\geqslant 0$, $f_i\leqslant 0$. Обозначим через $L+q$ сдвинутое линейное подпространство, определенное уравнениями $g_i=c_i$, где c_i — предел функции g_i вдоль заданной последовательности.

Внутри конуса σ как угодно далеко от его граней существуют точки, как угодно близкие к сдвинутому подпространству $L+q$ (в частности, конус σ имеет полную размерность $\dim\sigma=n$). Действительно, в качестве таких точек можно взять точки последовательности с достаточно большими номерами.

Пространство L не может пересекаться с конусом σ по грани: в противном случае все точки, лежащие на малом расстоянии от плоскости $L+q$, будут находиться на конечном расстоянии от грани конуса. Поэтому в пространстве L найдется вектор r, смотрящий строго внутрь конуса σ. Если пространство L определено целочисленными уравнениями, то, чуть пошевелив вектор r, его можно сделать рациональным и затем, умножив на натуральное число, сделать целочисленным. Луч $p\tau+q$, где $p=-r$, обладает всеми нужными свойствами.

Лемма 3. Пусть в условиях теоремы $\{\chi^{g_i}\}$ — подмножество характеров, стремящихся к конечным пределам $c_i\neq 0$, тогда существует точка $z\in T^n$, в которой $\chi^{g_i}(z)=c_i$.

Доказательство. Пусть среди подмножества векторов $\{g_i\}$, соответствующих характерам, стремящимся к конечным пределам, вектора $g_1,\dots,g_k$ линейно независимы. Уравнения $\chi^{g_i}=c_i$ для $i=1,\dots,k$ совместны и определяют конечное число поверхностей в торе, на которых остальные характеры из подмножества постоянны. Последовательность стремится к одной из поверхностей. Любая точка этой поверхности удовлетворяет условиям леммы.

Переходим к доказательству теоремы. Рассмотрим гомоморфизм ρ группы T^n в линейное пространство $\mathbb{R}^{n*}$, определенный формулой $\rho(z)=\ln|z|$, где $z=(z_1,\dots,z_n)$, а $\ln|z|=(\ln|z_1|,\dots$ $\dots,\ln|z_n|)$. При этом отображении для всякой точки $x\in\mathbb{R}^{n*}$ и характера χ^m, $m\in\mathbb{R}^n$, выполнено следующее соотношение: логарифм модуля характера χ^m постоянен на прообразе $\rho^{-1}(x)$ точки x и равен $\langle x, m\rangle$. Пусть характеры $\{\chi^{l_i}\}$, $\{\chi^{f_i}\}$ и $\{\chi^{g_i}\}$ вдоль заданной последовательности точек стремятся соответственно к ∞, к 0 и к комплексному числу $c_i\neq 0$. Тогда линейные функции на $\mathbb{R}^{n*}$, определенные векторами $\{l_i\}$, $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ из $\mathbb{R}^n$ будут стремиться вдоль образа последовательности, соответственно, к ∞, к $-\infty$ и к $\ln|c_i|$. По лемме 2 существует луч $p\tau+q$, вдоль которого линейные функции стремятся при $\tau\to-\infty$ к тем же пределам. Всем условиям теоремы удовлетворяет сдвинутая однопараметрическая zt^p, где z — точка, найденная в лемме 3.

Лемма 4. Топология на M_K хаусдорфова.

Лемма 4 вместе с леммой о бианалитичности функций перехода от карты к карте показывают, что введенная топология превращает множество M_K в комплексно-аналитическое многообразие.

Доказательство. Все открытые множества в M_K пересекаются с тором T^n (в каждой карте, кроме тора, видны лишь некоторые точки на координатных гиперплоскостях). Пусть любые окрестности точек a и b пересекаются. Выбирая по точке в пересечении с тором малых окрестностей точек a и b и затем уменьшая окрестности, получим последовательность точек тора, имеющую своим пределом как точку a, так и точку b. Фиксируем карты, в которых видны точки a и b. Пусть $\{\chi^m\}$ — конечный набор характеров, соответствующих координатным функциям этих карт. Функции $\{\chi^m\}$ стремятся на построенной последовательности точек к конечным пределам (равным координатам точки a и координатам точки b в своих системах координат). По теореме об отборе однопараметрических найдется сдвинутая однопараметрическая, вдоль которой функции $\{\chi^m\}$ стремятся к тем же пределам. Рассматривая эту кривую в координатной карте, содержащей точку a, мы видим, что эта кривая стремится к точке a. Рассматривая эту кривую в карте, содержащей точку b, мы видим, что она стремится и к точке b. Однако сдвинутая однопараметрическая при $t \to 0$ имеет не более одной предельной точки в M_K, а, значит, точки a и b совпадают.

Следствие. Система карт в множестве M_K превращает его в комплексно-аналитическое многообразие. Отображение многообразия M_{K_1} в M_{K_2}, определенное в п. 1.4, аналитично.

Первую часть утверждения мы проверили. Вторая часть сводится к локальному рассмотрению леммы 9 из п. 1.5.

1.7. Критерии компактности и собственности.

Теорема (критерий компактности многообразия M_K). Многообразие M_K компактно, если и только если примитивный конический полиэдр K покрывает все пространство однопараметрических $\mathbf{R}^{n*}$, т. е. $|K| = \mathbf{R}^{n*}$.

Доказательство. Если $|K| \neq \mathbf{R}^{n*}$, то существует вектор $a \in \mathbf{R}^{n*}$, не лежащий в $|K|$. Однопараметрическая линия степени a при $t \to 0$ не имеет предельных точек в M_K. Следовательно, многообразие M_K некомпактно.

Пусть теперь $|K| = \mathbf{R}^{n*}$. Покажем, что из любой последовательности точек в M_K можно выбрать сходящуюся. Многообразие M_K состоит из конечного числа орбит. Любая последовательность имеет бесконечную подпоследовательность, целиком лежащую в одной из орбит. Сначала рассмотрим случай, когда такая подпоследовательность лежит в самом торе T^n.

Фиксируем в каждой из конечного числа карт $M_{\bar{\sigma}}$ в M_K систему координат. Пусть $\{\chi^m\}$ — конечный набор характеров в торе, соответствующих этим координатным функциям. Выберем подпоследовательность, по которой каждая из функций имеет конечный или бесконечный предел (такая подпоследовательность существует: значения каждой функции лежат в пространстве $\mathbf{C}^1$, компактифицированном бесконечно удаленной точкой, а произведение компактных пространств компактно). Докажем, что эта подпоследовательность сходится в M_K. Действительно, выберем сдвинутую однопараметрическую, по которой функции $\{\chi^m\}$ стремятся к тем же пределам. Эта кривая, как и всякая мероморфная кривая в торе, имеет предел в M_K (см. лемму 1 из п. 1.6). К этому пределу и сходится подпоследовательность. Действительно, среди набора функций $\{\chi^m\}$ есть координатные функции карты, в которой лежит предел кривой. Подпоследовательность сходится к точке с теми же координатами, так как пределы координатных функций совпадают.

Рассмотрим теперь последовательность точек в орбите $\Phi[\sigma]$.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — базис конуса σ, и $m_1, \ldots, m_k$ — вектора конуса σ^* такие, что $\langle a_i, m_j \rangle = \delta_{i,j}$. Рассмотрим все конусы конического полиэдра K, для которых σ является гранью. Для каждого такого конуса σ_I фиксируем базис в $\sigma_I{}^*$, содержащий векторы $m_1, \ldots, m_k$ (см. п. 1.5.). Рассмотрим теперь набор характеров $\{\chi\}$, соответствующий всем векторам фиксированных базисов. Этот набор содержит, в частности, характеры $\chi^{m_1}, \ldots, \chi^{m_k}$. Все характеры $\{\chi\}$ регулярны на $M_{\bar\sigma}$ (так как все конуса $\sigma_I{}^*$ лежат в конусе σ^*). Сдвинем теперь q-ую точку последовательности с орбиты $\Phi[\sigma]$ в тор T^n так, чтобы каждая из набора функций $\{\chi\}$ изменилась по модулю не более, чем на 2^{-q}. Из сдвинутых точек выберем такую подпоследовательность, чтобы каждый характер $\{\chi\}$ имел по ней конечный или бесконечный предел. Покажем, что соответствующая подпоследовательность исходной последовательности сходится. Пусть Ct^a — сдвинутая однопараметрическая, стремящаяся к тому же пределу, что и сдвинутая подпоследовательность. Рассмотрим новую сдвинутую однопараметрическую Ct^{a+b}, где вектор b лежит строго внутри конуса σ. Пределы всех характеров $\{\chi^m\}$ не зависят от b.

Действительно, для характеров $\{\chi^m\}$ предел при $t \to 0$ $\chi^m(t^b) = 0$ равен нулю (как и для точек продеформированной последовательности), а для остальных характеров $\{\chi\}$ справедливо тождество $\chi\{t^b\} = 1$. При достаточно большом векторе b, вектор $a+b$ попадает внутрь одного из конусов σ_I, гранью которого является конус σ (потому что объединение таких конусов σ_I покрывает окрестность конуса σ в $\mathbf{R}^{n*}$). Предел сдвинутой однопараметрической Ct^{a+b} виден в карте M_{σ_I}. В наборе характеров присутствуют все координаты карты M_{σ_I}. Выбранная подпоследовательность точек имеет те же пределы всех координатных функций, что и кривая Ct^{a+b}, и имеет поэтому тот же предел.

Координатные функции соответствующей подпоследовательности точек в орбите $\Phi[\sigma]$ отличаются от координат сдвинутых точек не более чем на 2^{-q}. Поэтому они тоже сходятся к тому же пределу.

Замечание. Орбита торического многообразия размерности k вместе со всеми примыкающими к ней орбитами, в свою очередь, образует торическое многообразие размерности k. Опишем конический полиэдр, соответствующий этому многообразию. Пусть $\rho: T^n \to \Phi[\sigma]$ — гомоморфизм факторизации. При этом гомоморфизме пространство однопараметрических тора T^n переходит в пространство однопараметрических тора $\Phi[\sigma]$, причем плоскость, натянутая на $(n-k)$-мерный симплициальный конус σ, при этом переходит в 0. Образы симплициальных конусов σ_I, содержащих σ в качестве грани, являются симплициальными конусами в пространстве однопараметрических тора

$\Phi[\sigma]$. Совокупность этих конусов и образует конический полиэдр k-мерного торического многообразия, соответствующего замыканию орбиты. Последняя часть доказательства критерия компактности, фактически, основана на этой конструкции.

Теорема (критерий собственности отображения). Отображение $g: M_{K_1} \to M_{K_2}$ торических многообразий (определенное в случае, когда каждый конус конического полиэдра K_1 содержится в некотором конусе конического полиэдра K_2) является собственным, если и только если $|K_1| = |K_2|$. Собственное отображение является отображением «на».

Доказательство. Оба многообразия M_{K_1} и M_{K_2} содержат в качестве открытого всюду плотного множества тор T^n, на котором отображение g является изоморфизмом. Поэтому собственное отображение является отображением «на». Далее, допустим, что существует вектор a, лежащий в $|K_2|$, но не принадлежащий $|K_1|$. Однопараметрическая линия t^a степени a в торе T^n при $t \to 0$ имеет предел в M_{K_2}, но не имеет предельных точек в M_{K_1}, что противоречит собственности отображения.

При $|K_1| = |K_2|$ прообраз всякой кривой, имеющей предел в M_{K_2}, имеет предел и в M_{K_1}. Для окончания доказательства собственности отображения нужно воспользоваться теоремой об отборе однопараметрических (так же, как это было подробно проделано при доказательстве критерия компактности).

§ 2. Компактификация и разрешение особенностей

2.1. Полиномы Лорана и их многогранники Ньютона. Самым простым торическим многообразием является сама группа тор T^n. Конический полиэдр, соответствующий этому многообразию, состоит лишь из единственной точки 0. Запас регулярных функций на T^n, наоборот, наиболее богат.

Полиномом Лорана на T^n называется конечная линейная комбинация характеров $P = \sum c_m \chi^m$. Носителем $\operatorname{supp}(P)$ полинома Лорана P называется конечное множество точек $\{m\} \subset \mathbf{R}^n$, для которых коэффициент c_m не равен нулю. Многогранником Ньютона $\Delta(P)$ полинома Лорана P называется выпуклая оболочка его носителя. Опорной функцией полинома Лорана P называется функция $H_{\Delta(P)}$ на двойственном пространстве $\mathbf{R}^{n*}$, определенная формулой $H_{\Delta(P)}(a) = \min\limits_{x \in \Delta(P)} \langle a, x \rangle$. Укорочением P^a полинома Лорана P по вектору $a \in \mathbf{R}^{n*}$ называется $\sum\limits_{m \in \Delta^a} c_m \chi^m$ — линейная комбинация характеров, степени которых лежат на опорной грани $\Delta^a(P)$ многогранника $\Delta(P)$ в направлении a (т. е. грани многогранника $\Delta(P)$, на которой скалярное произведение с a достигает своего минимума), причем каждый характер χ^m степени $m \in \Delta^a(P)$ входит в полином Лорана P^a с тем же коэффициентом, что и в полином Лорана P.

Лемма 1. Пусть Ct^a — сдвинутая однопараметрическая и P — полином Лорана. Пусть укорочение P^a полинома Лорана P по порядку a в точке $C \in T^n$ не равно нулю, т. е. $P^a(C) \neq 0$. Тогда младший член при $t \to 0$ ограничения P на линию Ct^a имеет вид $P^a(C)\, t^{H_{\Delta(P)}(a)}$. Если же $P^a(C)=0$, то младший член ограничения имеет более высокую степень.

Доказательство. Ограничивая полином Лорана $P = \sum c_m \chi^m$ на сдвинутую однопараметрическую Ct^a, получаем $\sum c_m \chi^m(C) \cdot \chi^m(t^a)$. Выделим члены младшей степени по t:

$$\sum c_m \chi^m(C)\, \chi^m(t^a) = $$
$$= t^{H_{\Delta(P)}(a)} \sum_{m \in \Delta^a(P)} c_m \chi^m(C) + \ldots = t^{H_{\Delta(P)}(a)} P^a(C) + \ldots$$

(здесь точками обозначены члены степени большей, чем $H_{\Delta(P)}(a)$). Лемма 1 доказана.

Пусть P и Q — два полинома Лорана и $R = P \cdot Q$.

Лемма 2. При перемножении полиномов Лорана 1) укорочения по любому целочисленному вектору a перемножаются: $R^a = P^a Q^a$: 2) опорные функции многогранников Ньютона складываются: $H_{\Delta(R)} = H_{\Delta(P)} + H_{\Delta(Q)}$; 3) многогранники Ньютона складываются: $\Delta(R) = \Delta(P) + \Delta(Q)$.

Доказательство. Пусть C — любая точка тора, для которой $P^a(C) \neq 0$ и $Q^a(C) \neq 0$ (этому условию удовлетворяют почти все точки тора T^n, так как ни один полином Лорана не равен тождественно нулю).

Ограничивая полиномы Лорана P и Q на линию Ct^a, найдем младший член разложения ограничения полинома R на эту линию. Этот младший член есть $P^a(C)\, Q^a(C)\, t^{H_{\Delta(P)}(a) + H_{\Delta(Q)}(a)}$.

Это вычисление (совместно с леммой 1) доказывает пункт 1) и также пункт 2) для целочисленных векторов. Опорные функции однородны и непрерывны, поэтому утверждение пункта 2) распространяется на рациональные, а затем и на произвольные (векторные) аргументы опорных функций. Из аддитивности опорных функций вытекает аддитивность многогранников Ньютона.

2.2 Условия невырожденности. Система уравнений $P_1 = \ldots = P_k = 0$ с полиномами Лорана $P_1, \ldots, P_k$ называется регулярной в торе T^n, если в каждом корне этой системы дифференциалы функций P_i линейно независимы.

Лемма 1. Для почти всех наборов коэффициентов c_m^i полиномов Лорана $P_i = \Sigma c_m^i \chi^m$ с фиксированными носителями система уравнений $P_1 = \ldots = P_k = 0$ регулярна в T^n. Точнее, в пространстве коэффициентов существует алгебраическое подмножество комплексной коразмерности $\geqslant 1$ (вещественной коразмерности $\geqslant 2$), в дополнении к которому соответствующие системы регулярны. Более того, если для $m<k$ система $P_1=\ldots=P_m=0$ регулярна, то для почти всех (в том же смысле) коэффициентов оставшихся плиономов Лорана $P_{m+1},\ldots$ $\ldots, P_k$ система $P_1=\ldots=P_{m+1}=\ldots=P_k=0$ регулярна.

Доказательство. Пусть система $P_1=\ldots=P_m=0$ регулярна. Тогда она определяет неособое многообразие $X\subset T^n$. Выделим в каждом из уравнений $P_j=0$ при $j>m$ по характеру χ^{m_j} и уравнение $P_j=0$ представим в виде $\tilde{P}_j=-c^j_{m_j}\chi^{m_j}$, где $\tilde{P}_j=P_j-c^j_{m_j}\chi^{m_j}$. Полная система уравнений эквивалентна системе $\tilde{P}_j\chi^{-m_j}=-c^j_{m_j}$ на многообразии X. По теореме Сарда — Бертини для почти всех коэффициентов $c^j_{m_j}$ эта система невырождена на X. Для этих наборов коэффициентов система $P_1=\ldots=P_k=0$ регулярна в торе.

Система уравнений $P_1=\ldots=P_k=0$ с полиномами Лорана $P_1,\ldots,P_k$ называется a-регулярной для целочисленного вектора $a\in\mathbb{R}^{n*}$, если регулярна система $P^a_1=\ldots=P^a_k=0$ (таким образом, регулярные системы a-регулярны для $a=0$).

Лемма 2. В лемме 1 регулярность можно заменить на a-регулярность.

Для доказательства достаточно воспользоваться леммой 1 для системы $P^a_1=\ldots=P^a_k=0$.

Система $P_1=\ldots=P_k=0$ называется Δ-невырожденной, если она a-регулярна для любого целочисленного вектора $a\in\mathbf{R}^{n*}$.

Лемма 3. Для заданной системы $P_1=\ldots=P_k=0$ существует лишь конечное число различных условий a-регулярности. Именно, все различные условия получаются, если выбрать по одному вектору a в разбиении Δ^* пространства $\mathbb{R}^{n*}$, двойственному к многограннику $\Delta=\Delta(P_1)+\ldots+\Delta(P_k)$.

Доказательство. Для того чтобы у двух векторов a и b опорные грани многогранника суммы совпадали, т. е. чтобы $\Delta^a=\Delta^b$, необходимо и достаточно, чтобы совпадали их опорные грани у многогранников слагаемых, т. е. чтобы $\Delta^a(P_i)=\Delta^b(P_i)$ при $i=1,\ldots,k$. Если же $\Delta^a(P_i)=\Delta^b(P_i)$ при $i=1,\ldots,k$, то условие a-регулярности не отличается от условия b-регулярности.

Лемма 4. В лемме 1 регулярность можно заменить на Δ-невырожденность.

Согласно лемме 3, для доказательства достаточно конечное число раз воспользоваться леммой 2.

2.3. Полиномы Лорана на торических многообразиях. Полином Лорана — это конечная линейная комбинация характеров тора. Вместе с характерами полиномы Лорана продолжаются как мероморфные функции на торические многообразия.

Пусть $P=\sum c_m\chi^m$ — полином Лорана с многогранником Ньютона $\Delta(P)$. Пусть σ — примитивный конус в пространстве $\mathbf{R}^{n*}$. Нас интересует, как себя ведет функция $P_{\bar\sigma}$, полученная продолжением P на многообразие $M_{\bar\sigma}$. Особенно просто обстоит дело в том случае, когда опорная функция $H_{\Delta(P)}$ многогранника $\Delta(P)$ линейна на конусе σ. Итак, пусть на конусе σ функция $H_{\Delta(P)}$ совпадает со скалярным произведением на вектор m (вектор m определен неоднозначно, если $\dim\sigma<n$, скалярные произведения с вектором m на конусе σ определены однозначно).

Лемма 1. Пусть для векторов $b\in\sigma$ справедливо равенство $H_{\Delta(P)}(b)=\langle b, m\rangle$, тогда 1) функция $P_{\bar\sigma}\chi^{-m}$ регулярна на многообразии $M_{\bar\sigma}$; 2) ограничение функции $P_{\bar\sigma}\chi^{-m}$ на орбиту $\Phi[\sigma]$ есть $P^a\chi^{-m}$, где a — любой вектор, лежащий строго внутри σ (точнее, значение функции $P_{\bar\sigma}\chi^{-m}$ в точке c орбиты $\Phi[\sigma]$ совпадает со значением полинома Лорана $P^a\chi^{-m}$ в любой точке C тора T^n, переходящей в c при гомоморфизме факторизации $\rho\colon T^n\to\Phi[\sigma]$).

Доказательство. Для каждого характера χ^l, входящего в полином Лорана, скалярное произведение $\langle b, l\rangle$ с вектором b на конусе σ, $b\in\sigma$, не меньше, чем опорная функция многогранника $H_{\Delta(P)}$. Поэтому характер χ^{l-m} регулярно продолжается на многообразие $M_{\bar\sigma}$. Далее, на орбите $\Phi[\sigma]$ обращаются в нуль те и только те характеры χ^{l-m}, для которых $\langle a, l-m\rangle>0$. Характеры, для которых $\langle a, l-m\rangle=0$, соответствуют точкам l на грани $\Delta^a(P)$ многогранника Ньютона и доопределяются таким образом, что $\chi_{\bar\sigma}^{l-m}(c)=\chi^{l-m}(C)$, где точка C — любая точка, переходящая в c при гомоморфизме факторизации $\rho\colon T^n\to\Phi[\sigma]$.

На одномерном конусе опорная функция $H_{\Delta(P)}$ всегда линейна.

Следствие. Порядок нуля полинома Лорана P с многогранником Ньютона $\Delta(P)$ на единственной $(n-1)$-мерной орбите многообразия $M_{\bar\sigma}$, где σ — одномерный конус, в котором целочисленной образующей является вектор a, равен значению опорной функции многогранника $\Delta(P)$ на векторе a (нуль отрицательного порядка на $(n-1)$-мерной орбите означает, как обычно, полюс соответствующего порядка).

Пусть теперь $P_1, \ldots, P_k$ — набор полиномов Лорана с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, опорные функции которых линейны на конусе σ. Нас будет интересовать, как себя ведет многообразие X, определенное в T^n системой $P_1=\ldots=P_k=0$, вблизи орбиты $\Phi[\sigma]$ многообразия $M_{\bar\sigma}$.

Лемма 2. Пусть полиномы Лорана $P_1, \ldots, P_k$ a-регулярны для некоторого (а значит и для любого) вектора a, лежащего строго внутри σ. Тогда замыкание $\overline{X}$ множества X в многообразии $M_{\overline{\sigma}}$ в окрестности орбиты $\Phi[\sigma]$ является неособым аналитическим многообразием, трансверсально пересекающим орбиту $\Phi[\sigma]$. При этом пересечение замыкания $\overline{X}$ с орбитой $\Phi[\sigma]$ задается в $\Phi[\sigma]$ системой уравнений

$$P_1^a\chi^{-m_1} = \ldots = P_k^a\chi^{-m_k} = 0.$$

Доказательство. В окрестности каждой точки орбиты $\Phi[\sigma]$ лемма вытекает из теоремы о неявной функции и из леммы 1. Для окончания доказательства осталось в качестве окрестности орбиты взять объединение указанных окрестностей ее точек.

Замечание. Лемма 2 остается справедливой не только для полиномов Лорана, но и для рядов Лорана $f_1 = \ldots = f_k = 0$, где суммирование ведется по бесконечному количеству индексов. Для справедливости такого обобщения достаточно, чтобы ряды $f_1, \ldots, f_k$ сходились в окрестности орбиты. Обобщенная лемма 2 особенно удобна, если все укорочения f_i^a — полиномы Лорана. Для доказательства обобщения достаточно старых соображений, так так теорема о неявной функции справедлива не только для алгебраических, но и для аналитических функций.

Пусть теперь K — произвольный примитивный конический полиэдр в $\mathbb{R}^{n*}$, $P_1, \ldots, P_k$ — полиномы Лорана и $P_{1,K}, \ldots, P_{k,K}$ — мероморфные продолжения полиномов Лорана на многообразие M_K. Резюмируем полученные результаты.

Теорема. 1) Порядок мероморфной функции $P_{i,K}$ на многообразии M_K на $(n-1)$-мерной орбите, соответствующей ребру σ_1 в K с образующей a, равен $H_{\Delta(P_i)}(a)$. 2) Если опорные функции $H_{\Delta(P_i)}$ линейны на конусе σ конического полиэдра K и система $P_1 = \ldots = P_k$ a-регулярна для a, лежащего строго внутри σ, то замыкание $\overline{X}$ множества X решений системы в T^n является в окрестности $\Phi(\sigma)$ неособым многообразием, трансверсально пересекающим $\Phi[\sigma]$. Уравнения пересечения $\overline{X}$ с $\Phi[\sigma]$ в факторторе $\Phi[\sigma]$ есть $P_1^a\chi^{-m_1} = \ldots = P_k^a\chi^{-m_k} = 0$.

Доказательство теоремы автоматически вытекает из локальных вычислений лемм 1 и 2.

2.4. Компактификация (случай T^n). Пусть $P_1 = \ldots = P_k = 0$ — Δ-невырожденная система уравнений в T^n с многогранниками $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ и X — многообразие в T^n, определенное этой системой.

Пусть K — произвольный примитивный конический полиэдр, задающий подразбиение полиэдра Δ^* в $\mathbb{R}^{n*}$, двойственного многограннику $\Delta = \Delta_1 + \ldots + \Delta_k$. Вложение g тора T^n в торическое многообразие M_K назовем компактификацией, разрешающей набор многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Мы будем отождествлять образ тора при вложении g с исходным тором, а образ многообразия X — с исходным многообразием X.

Теорема. Замыкание $\overline{X}$ многообразия X в торическом многообразии M_K компактно, неособо и трансверсально пересекает все орбиты многообразия M_K.

Доказательство. По теореме о неявной функции многообразие $X \subset T^n$ неособо в T^n. Около каждой орбиты $\Phi[\sigma]$ многообразия M_K множество $\bar{X}$ является аналитическим многообразием, трансверсально пересекающим орбиту $\Phi[\sigma]$. Это доказано в теореме из п. 2.3.

Замечание 1. Полиномы Лорана $P_1, \ldots, P_k$ являются мероморфными функциями на многообразии M_K. Порядки этих функций на $(n-1)$-орбитах многообразия M_K определяются в теореме из п. 2.3. Уравнения пересечения многообразия $\bar{X}$ с орбитой любой размерности многообразия M_K также определяются в этой теореме.

Замечание 2. Можно явно построить компактификацию M_K, разрешающую заданный набор многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Для этого достаточно воспользоваться явным алгоритмом для простого подразбиения полиэдра Δ^*, приведенным в теореме из п. 1.2.

Замечание 3. Из теоремы вытекает, что дискретные характеристики многообразия X зависят лишь от многогранников Ньютона (и не зависят от задания конкретных коэффициентов Δ-невырожденной системы). Действительно, Δ-вырожденные системы образуют множество вещественной коразмерности не меньше двух в пространстве систем с заданными многогранниками Ньютона. Поэтому от одной Δ-невырожденной системы можно непрерывно перейти к другой, не проходя через вырожденные системы. Соответствующие многообразия X будут деформироваться, оставаясь компактными, аналитическими и трансверсальными орбитам многообразия M_K. Значительная часть дискретных инвариантов многообразия X не меняется при подобных деформациях. Вычисления показывают, что основные дискретные инварианты явно и достаточно просто выражаются через многогранники Ньютона. В выражениях инвариантов встречаются такие геометрические характеристики многогранников, как числа целых точек, лежащих на их гранях, объемы многогранников и др.

2.5. Условия совместности. Набор из $l+1$ многогранника в $\mathbf{R}^n$ называется вырожденным, если существует l-мерное подпространство, в которое можно параллельно перенести все многогранники. Например, вырожден набор из одного многогранника, состоящего из одной точки, набор из двух многогранников, состоящих из двух параллельных отрезков и т д.

Определение. Набор многогранников в $\mathbf{R}^n$ называется зависимым, если он содержит вырожденный поднабор.

Теорема 1. Δ-невырожденная система уравнений $P_1 = \ldots = P_k = 0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ несовместна в T^n, если многогранники Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ зависимы. В противном случае она определяет в T^n аналитическое $(n-k)$-мерное многообразие.

Доказательство. Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_{l+1}$ — вырожденный набор многогранников. Тогда система уравнений $P_1 = \ldots = P_{l+1} = 0$, фактически, зависит от l переменных. Поэтому, как угодно мало изменив ее коэффициенты (для того, чтобы сделать эту подсистему регулярной), можно добиться, чтобы эта подсистема, и, следовательно, и вся система стали бы несовместны. Исходная (непошевеленная) система не может быть совместной. Действительно, если бы она была совместной, то по теореме о неявной функции при малом шевелении коэффициентов многообразие решений исходной системы не исчезло, а лишь чуть деформировалось.

Для доказательства второй части теоремы нам понадобится теорема Бернштейна о числе корней [4]. Добавим к системе $P_1 = \ldots = P_k = 0$ уравнения $P_{k+1} = \ldots = P_n = 0$ с многогранниками Ньютона $\Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_n$ полной размерности так, чтобы общая система оставалась Δ-невырожденной (это можно сделать согласно лемме 4 из п. 2.2.). Система уравнений $P_1 = \ldots = P_k = P_{k+1} = \ldots = P_n = 0$ совместна в T^n, ибо число ее решений по теореме Бернштейна равно смешанному объему многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, умноженному на $n!$, а смешанный объем независимых многогранников не равен нулю.

Пусть $P_1 = \ldots = P_k = 0$ — Δ-невырожденная система в торе T^n, инвариантная относительно действия q-мерной подгруппы тора. Такая ситуация возникает, если все многогранники Ньютона $\Delta(P_1), \ldots, \Delta(P_k)$ лежат в $(n-q)$-мерной плоскости L_{n-q} пространства $\mathbb{R}^n$, ортогональной q-мерной плоскости $\pi \subset \mathbb{R}^{n*}$, соответствующей q-мерной подгруппе тора. Умножая уравнения системы на характеры, к этой ситуации можно привести систему $P_1 = \ldots = P_k = 0$, многогранники Ньютона которой лежат в плоскостях, параллельных плоскости L_{n-q}. Рассмотрим новую Δ-невырожденную систему $P_1 = \ldots = P_k = P_{k+1} = \ldots = P_m = 0$, содержащую все старые уравнения и некоторые новые.

Когда в каждой орбите действия q-мерной группы $T(\pi)$ на многообразии решений исходной системы $P_1 = \ldots = P_k = 0$ лежит хотя бы один корень расширенной системы $P_1 = \ldots = P_m = 0$? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2. На каждой орбите лежит корень расширенной системы, если и только если многогранники $\Delta_1, \ldots, \Delta_m$ независимы (исключение составляет здесь случай, в котором многогранники $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ зависимы — в этом случае множество

Доказательство. Ограничение уравнений $P_{k+1} = \ldots = P_m = 0$ на орбиту группы $T(\pi)$, лежащую в многообразии решений системы $P_1 = \ldots = P_k = 0$, представляет собой Δ-невырожденную систему в торе T^n, многогранники Ньютона которой — образы многогранников $\Delta_{k+1}, \ldots, \Delta_n$ при факторизации пространства $\mathbf{R}^n$ по подпространству L_{n-q}. Теорема 2 теперь вытекает из теоремы 1.

2.6. Разрешение особенностей и компактификация (случай $\mathbf{C}^n$). В этом пункте для многообразия, определенного в $\mathbf{C}^n$ Δ-невырожденной системой уравнений, строится разрешение особенностей и компактификация разрешенного многообразия. Построение целиком определяется набором многогранников Ньютона системы уравнений. По набору многогранников Ньютона определяется крест сингулярности — объединение нескольких координатных плоскостей, вдоль которых приходится раздувать $\mathbf{C}^n$ при разрешении особенностей. Крест сингулярности разбивается на орбиты трех типов: ненужные, достижимые и недостижимые. Это разбиение определяется по набору многогранников Ньютона и обладает следующими свойствами. Во-первых, многообразие, определенное Δ-невырожденной системой, не пересекает ненужных орбит. Во-вторых, каждая точка пересечения этого многообразия с достижимой орбитой является предельной для торической части многообразия (т. е. для подмножества точек многообразия, лежащих на торе). В-третьих, все точки многообразия, лежащие на недостижимых орбитах, не принадлежат замыканию торической части многообразия.

Пространство $\mathbf{C}^n$ является торическим многообразием, конический полиэдр которого — положительный октант в $\mathbf{R}^{n*}$. Характеры, степени которых лежат в положительном октанте $\mathbf{R}^n$, голоморфно продолжаются на пространство $\mathbf{C}^n$ и представляют собой обычные мономы. Их линейные комбинации — это полиномы на $\mathbf{C}^n$.

С каждым полиномом в $\mathbf{C}^n$ связан полином Лорана — ограничение этого полинома на тор T^n. Допуская небольшую вольность речи, многогранник Ньютона этого полинома Лорана, укорочение этого полинома Лорана и т. д., мы будем называть многогранником Ньютона полинома, укорочением полинома и т. д.

Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ — многогранники, лежащие в положительном октанте пространства $\mathbf{R}^n$. Ограничим опорные функции многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ на положительный октант в $\mathbf{R}^{n*}$. Грань σ положительного октанта в $\mathbf{R}^{n*}$ называется *несингулярной* для набора многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, если опорные функции всех многогранников набора тождественно равны нулю на σ. Все остальные грани октанта называются сингулярными.

Из определения вытекает, что все грани октанта (включая и сам октант) несингулярны, если и только если все многогранники содержат точку $0 \in \mathbf{R}^n$.

Сингулярная грань σ октанта в $\mathbf{R}^{n*}$ называется ненужной в следующем случае. Рассмотрим все многогранники из набора $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, для которых опорная функция на грани σ тождественно равна нулю, и рассмотрим их опорные грани, для которых опорная функция равна нулю. Если полученный набор опорных граней зависим, то грань называется ненужной.

Сингулярная грань σ называется достижимой, если существует вектор a, лежащий строго внутри грани σ, такой, что опорные грани $\Delta_1^a, \ldots, \Delta_k^a$ независимы.

Сингулярная грань называется недостижимой, если она не является ненужной и не является достижимой.

Орбита торического многообразия $\mathbf{C}^n$ (т. е. координатная плоскость, из которой выброшены все меньшие координатные плоскости) называется сингулярной (несингулярной, ненужной, достижимой и недостижимой) для многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, если конус, соответствующий этой орбите, (являющийся гранью в $\mathbf{R}^{n*}$) сингулярен (несингулярен, ненужен, достижим, недостижим) для этих многогранников. Объединение всех сингулярных орбит заполняет объединение нескольких координатных плоскостей и называется крестом сингулярности для многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$.

С набором многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ свяжем разбиение Δ^* пространства $\mathbf{R}^{n*}$, двойственное к многограннику $\Delta = \Delta_1 + \ldots$ $\ldots + \Delta_k$, и разбиение Δ_+^* положительного октанта в $\mathbf{R}^{n*}$, индуцированное разбиением Δ^*.

Простое подразбиение K^+ полиэдра Δ_+^* назовем разрешающим для набора многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Пару примитивных полиэдров $K^+ \subset K$, где K^+ является подполиэдром в K, назовем компактифицирующей для набора многогранников $\{\Delta\}$, если K^+ — разрешающий полиэдр для этих многогранников, а K — примитивное подразбиение полиэдра Δ^*.

Лемма 1. По набору многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ можно явно построить некоторые разрешающие полиэдры и компактифицирующие пары полиэдров.

Доказательство. Для построения разрешающих полиэдров нужно применить теорему из п. 1.2 для полиэдра Δ_+^*. Для построения компактифицирующей пары полиэдров достаточно применить эту же теорему к полиэдру Δ_∞^*, двойственному к многограннику $\Delta_\infty = \Delta_0 + \Delta_1 + \ldots + \Delta_k$, где Δ_0 — стандартный симплекс (определенный неравенствами $0 \leqslant x_i$; $\Sigma x_i \leqslant 1$).

Определение. Торическое многообразие M_{K^+} вместе с проекцией $g: M_{K^+} \to \mathbf{C}^n$ называется разрешением для многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, если K^+ — разрешающий полиэдр для этих многогранников; торические многообразия M_{K^+}, M_K с проекцией $g: M_{K^+} \to \mathbf{C}^n$ и вложением $g_0: M_{K^+} \to M_K$ называются разрешением с компактификацией для многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, если полиэдры K^+, K образуют компактифицированную пару.

Лемма 2. 1) разрешение $g: M_{K^+} \to \mathbf{C}^n$ является собственным отображением, взаимно однозначным вне креста сингулярности набора многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. В частности, отображение взаимно однозначное, если все многогранники содержат точку $0 \in \mathbf{R}^n$. 2) Вложение $g_0: M_{K^+} \to M_K$ является компактификацией пространства M_{K+}. Дополнение к образу M_{K+} состоит из трансверсально пересекающихся дивизоров в M_K.

Доказательство. По определению, опорные функции многогранников равны нулю на несингулярных гранях положительного октанта в $\mathbf{R}^{n*}$. Эти грани примитивны и входят в полиэдр Δ_+^*. Так как K_+ — простое разбиение, эти грани дальше не подразбиваются, и отображение $g:M_{K+}\to\mathbf{C}^n$ взаимно однозначно в несингулярных орбитах. Вторая часть утверждения вытекает из общих свойств торических многообразий.

Переходим к связи разрешения для многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, с Δ-невырожденными системами с теми же многогранниками Ньютона. Пусть $P_1 = \ldots = P_k = 0$ — система полиномиальных уравнений в $\mathbf{C}^n$ с многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$; $X\subset\mathbf{C}^n$ — многообразие, определенное этой системой; X_c — пересечение этого многообразия с крестом сингулярности для многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Пусть $g:M_{K+}\to\mathbf{C}^n$ — разрешение и $g:M_{K+}\to\mathbf{C}^n$, $g_0:M_{K+}\to M_K$ — разрешение с компактификацией для многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Обозначим через X_0 прообраз множества $X\setminus X_c$ в M_{K+}, через X^+ — его замыкание в M_{K+} и через $\bar{X}^+$ — замыкание его образа в M_K.

Теорема. При сформулированных ниже почти всегда выполненных условиях на коэффициенты уравнений $P_1, \ldots, P_k$ справедливы следующие утверждения: 1) X^+ — аналитическое многообразие в M_{K+}, трансверсально пересекающее его орбиты; 2) X_0 получается из X^+ выбрасыванием его пересечений с набором трансверсально пересекающихся гиперповерхностей, представляющих собой прообраз креста сингулярности при проекции g; 3) проекция g устанавливает взаимно аналитическое соответствие между многообразием X_0 и множеством $X\setminus X_c$; 4) проекция g отображает X^+ на многообразие X, из которого выброшены пересечения со всеми орбитами недостижимости для многогранников $\{\Delta_i\}$; 5) если полиэдры K^+, K образуют компактифицирующую пару, то замыкание $\bar{X}^+$ многообразия X^+ является неособым компактным многообразием, трансверсально пересекающим «бесконечно удаленные» гиперповерхности многообразия M_K, причем X^+ получается из $\bar{X}^+$ выбрасыванием этих пересечений.

Сформулируем условия на коэффициенты, при которых справедлива теорема. Пусть $\mathbf{R}^I$ — любая координатная плоскость в $\mathbf{R}^n$ (пространство $\mathbf{R}^n$ тоже считается координатной плоскостью). Обозначим через $\{\Delta_i^I\}$ набор многогранников $\Delta_i^I = \Delta_i \cap \mathbf{R}^I$ (в котором вычеркнуты пустые многогранники). Свяжем с плоскостью $\mathbf{R}^I$ систему $\{P_i\}^I$ уравнений $P_1^I = \ldots = P_k^I = 0$, где P_i^I — укорочение полинома P_i по грани Δ_i^I. Пункты 1)—4) теоремы выполняются для систем уравнений, у которых системы $\{P_i\}^I$ для всех плоскостей $\mathbf{R}^I$ a-регулярны для всех векторов из положительного октанта $a \in \mathbf{R}_{+}^{n*}$. Для справедливости пункта 5) нужно требовать выполнения этого условия для всех векторов $a \in \mathbf{R}^{n*}$.

Замечание. Порядки функции g^*P_i на $(n-1)$-мерных орбитах многообразий M_{K+} и M_K определяются при помощи теоремы из п. 2.3. При помощи той же теоремы определяются уравнения пересечения многообразий X^+ и $\overline{X}^+$, соответственно, с орбитами многообразий M_{K+} и M_K.

Отметим три частных случая теоремы 1.

1. Все многогранники Ньютона содержат начало координат. В этом случае крест сингулярности пуст, многообразие M_K совпадает с $\mathbf{C}^n$, а многообразие X^+ — с исходным многообразием X. Теорема 1 в этом случае предлагает торическую компактификацию пространства $\mathbf{C}^n$, в которой замыкание $\overline{X}$ многообразия X неособо и трансверсально пересекает бесконечно удаленные орбиты. В этом случае теорема 1 совершенно аналогична теореме о компактификации для T^n (см. п. 2.4.).

2. Крест сингулярности для многогранников Ньютона содержит лишь ненужные орбиты. Теорема 1 для этого случая предлагает раздутие M_K пространства $\mathbf{C}^n$, содержащее многообразие X^+, бианалитически эквивалентное многообразию X, и компактификацию пространства M_{K+}, в которой замыкание $\overline{X}$ многообразия X неособо и трансверсально пересекает бесконечно удаленные орбиты.

3. Крест сингулярности для многогранников Ньютона содержит лишь ненужные и достижимые орбиты. Этот случай отличается от предыдущего тем, что неособое многообразие X^+ не эквивалентно (особому) многообразию X, но отображается на многообразие X взаимно однозначно на открытом всюду плотном множестве.

Перейдем к доказательству теоремы. Пункты 1)—3) и 5) доказываются совершенно аналогично теореме из п. 2.4. Единственный пункт, нуждающийся в проверке, это пункт 4. Нужно доказать, что ни одна из точек множества X, лежащих на недостижимой орбите, не является предельной для многообразия $X \setminus X_c$ и что любая точка множества X, лежащая на достижимой орбите, является предельной для этого множества.

Если точка на недостижимой орбите лежит в замыкании $X \setminus X_c$, то существует мероморфная кривая в $X \setminus X_c$, стремящаяся к этой точке (по теореме от отборе кривых [17]). Пусть $z(t) = Ct^a \times (1 + O(t))$ — эта кривая. Тогда вектор a лежит внутри двойственного конуса к недостижимой грани, а точка C — корень системы уравнений $P_1^a = \ldots = P_h^a = 0$ (последнее условие получается при выделении старших членов в тождествах $P_i(z(t)) \equiv 0$). Однако по условию недостижимости многогранники $\Delta_1^a, \ldots, \Delta_h^a$ зависимы, и невырожденная система $P_1^a = \ldots = P_h^a = 0$ несовместна (теорема 1 из п. 2.5.).

Пусть теперь x — произвольная точка множества X, лежащая на достижимой орбите. Так как x лежит на X, то $P_i^I(x)=0$ (здесь P_i^I — ограничения полиномов P_i на координатную плоскость, являющуюся замыканием достижимой орбиты). По условию существует вектор a, лежащий внутри двойственного конуса к орбите, для которого многогранники $\Delta_1^a, \ldots, \Delta_k^a$ независимы. Рассмотрим торическое многообразие $M_{\bar{\sigma}_1}$, где σ_1 — одномерный конус, натянутый на вектор a. Рассмотрим замыкание $\overline{X}_{\sigma_1}$ в $M_{\bar{\sigma}_1}$ многообразия, определенного в T^n системой $P_1=\ldots=P_k=0$. Согласно теореме из п. 2.3, это замыкание является аналитическим многообразием, а его пересечения с орбитой $\Phi[\sigma_1]$ на $\Phi[\sigma_1]$ задается мой $P_i^I=0$. Согласно теореме 2 из п. 2.5, для каждого я x системы $P_i^I=0$ найдется эквивалентное ему относи цействия группы $T(\pi)$ решение системы $P_i^a=0$ (здесь оскость, натянутая на конус σ, соответствующий до юй орбите). Пусть $\tilde{x}$ — это решение. Многообразие X_{σ_1} эрсально пересекает орбиту $\Phi[\sigma_1]$ многообразия M_{σ_1}, по существует кривая, выходящая из точки $\tilde{x}$ в T^n и леж X_{σ_1}. Проекция этой кривой при отображении $g: M_{\sigma_1} \to \mathbf{C}^n$ выходить из точки x и лежать в $X \setminus X_c$. Теорема доказа

2.7. Разрешение особенностей (л ый вариант). В этом пункте рассказывается о локальном те приведенных выше глобальных конструкций. Для ростка аналитической функции в $(\mathbf{C}^n, 0)$ определяется конический многогранник Ньютона. Для системы аналитических уравнений, заданных в окрестности нуля, определяется условие Δ-невырожденности, выполненное для почти всех систем уравнений с фиксированными коническими многогранниками Ньютона. Основной результат пункта — разрешение особенностей Δ-невырожденной системы уравнений при помощи подходящего торического многообразия.

Бесконечный замкнутый выпуклый многогранник Δ будем называть коническим, если, во-первых, Δ лежит в положительном октанте $\mathbf{R}_+^n$, во-вторых, Δ с каждой точкой m содержит перенесенный положительный октант $m+\mathbf{R}_+^n$ с вершиной в точке m и, в-третьих, если все вершины Δ являются целыми точками.

Аналитическая функция f в окрестности точки $0 \in \mathbf{C}^n$ раскладывается в ряд Тейлора $f(z)=\sum c_m \chi^m(z)$, где суммирование ведется по множеству всех векторов m, лежащих в положительном октанте $\mathbf{R}_+^n$, а $\chi^m(z)=z_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{m_n}$. Носителем $\operatorname{supp}(f)$ ростка аналитической функции называется множество точек $m \in \mathbf{R}_+^n$, для которых коэффициент $c_m \neq 0$. Коническим многогранником Ньютона $\Delta(f)$ ростка аналитической функции f называется выпуклая оболочка множества перенесенных положительных октантов с вершинами во всех точках носителя функции f, т. е. выпуклая оболочка множества $\bigcup\limits_{m\in \operatorname{supp}(f)} \{m+\mathbf{R}_+^n\}$.

Лемма 1. Конический многогранник имеет лишь конечное число вершин.

Доказательство. Конический многогранник с бесконечным числом вершин имеет бесконечную возрастающую последовательность вложенных конических многогранников. Сопоставим каждому коническому многограннику идеал в кольце сходящихся степенных рядов в окрестности точки 0 пространства $\mathbf{C}^n$, состоящий из всех аналитических функций с носителями, содержащимися в заданном коническом многограннике. При этом сопоставлении большему многограннику соответствует больший идеал. Поэтому существование конического многогранника с бесконечным числом вершин противоречит теореме Гильберта об обрыве возрастающей цепочки идеалов [10]. Разумеется, лемму 1 можно доказать и геометрически, не обращаясь к теореме Гильберта.

Следствие. Конический многогранник имеет конечное *число компактных граней.*

Объединение компактных граней конического многогранника называется его диаграммой.

Конический многогранник называется удобным, если он имеет по вершине на каждом ребре положительного октанта.

Опорная функция конического многогранника определена для векторов из положительного октанта $\mathbf{R}_+^{n*}$: минимум по $x\in\Delta$ скалярного произведения $\langle a, x\rangle$ вектора $a\in\mathbf{R}^{n*}$ с неотрицательными компонентами достигается в одной из конечного числа вершин (если хотя бы одна координата вектора a отрицательная, то этот минимум равен $-\infty$). Отметим, что на грани положительного октанта в $\mathbf{R}^{n*}$ опорная функция равна нулю, если и только если конический многогранник пересекается с двойственной гранью положительного октанта в $\mathbf{R}^n$.

Пусть $f_1=\ldots=f_k=0$ — система аналитических уравнений в окрестности точки 0 с коническими многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Для каждого вектора $a\in\mathbf{R}^{n*}$ с положительными координатами определены компактные грани $\Delta_1^a, \ldots, \Delta_k^a$ конических многогранников Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Определение укорочения f_i^a аналитической функции f_i по порядку a дословно повторяет определение укорочения полинома Лорана.

Система уравнений $f_1=\ldots=f_k=0$ называется a-регулярной, если система уравнений $f_1^a=\ldots=f_k^a=0$ (в которой f_i^a — уже полиномы Лорана) регулярна в T^n.

Система аналитических уравнений $f_1=\ldots=f_k=0$ называется Δ-невырожденной, если она a-регулярна для любого вектора a с положительными координатами.

Условия a-регулярности и Δ-невырожденности выполнены для почти всех систем аналитических функций с заданными коническими многогранниками.

Конические многогранники Ньютона $\Delta_1, \ldots \Delta_k$ называются зависимыми, если для всякого вектора a с положительными координатами многогранники $\Delta_1^a, \ldots, \Delta_k^a$ зависимы.

Теорема 1. Росток X аналитического множества, определенный около точки $0 \in \mathbf{C}^n$ Δ-невырожденной системой аналитических уравнений $f_1 = \ldots = f_k = 0$, целиком лежит в объединении координатных плоскостей, если конические многогранники Ньютона этих уравнений зависимы. Если же конические многогранники Ньютона независимы, то росток X после выбрасывания его пересечений с координатными плоскостями становится аналитическим $(n-k)$-мерным многообразием.

Доказательство. Покажем, что для зависимых конических многогранников росток X целиком лежит в координатных плоскостях.

Действительно, допустим, что точка 0 является предельной точкой множества, полученного из ростка X после выбрасывания его пересечений с координатными плоскостями. Тогда по теореме об отборе кривых [17] существует аналитическая кривая $z(t) = Ct^a(1+O(t))$, лежащая в построенном множестве и стремящаяся к нулю при $t \to 0$. При этом выполнены тождества $f_i(z(t)) \equiv 0$. Выделяя в этих тождествах младшие члены, получим, что точка C является совместным корнем системы $f_1^a = \ldots = f_k^a = 0$.

Однако по теореме 1 из п. 2.5. система $f_1^a = \ldots = f_k^a = 0$ несовместна в торе T^n, так как многогранники $\Delta_1^a, \ldots \Delta_k^a$ зависимы. Вторая часть теоремы может быть выведена из теоремы о разрешении особенностей.

Переходим к разрешению особенностей многообразия, определенного в окрестности точки нуль в $\mathbf{C}^n$ Δ-невырожденной системой аналитических уравнений. Построение целиком определяется набором конических многогранников Ньютона и является локальной модификацией конструкции п. 2.6.

Опорные функции конических многогранников определены в положительном октанте пространства $\mathbf{R}^{n*}$. В п. 2.6. по набору многогранников Ньютона определялись, в частности, сингулярные и несингулярные грани положительного октанта в $\mathbf{R}^{n*}$, разрешающий полиэдр K^+, крест сингулярности и разрешение, состоящее из торического многообразия M_{K+} вместе с проекцией $g: M_{K+} \to \mathbf{C}^n$. Определение всех этих объектов дословно переносится на случай конических многогранников. Определение ненужных, достижимых и недостижимых орбит креста сингулярности нуждается в модификации.

Напомним, что конические многогранники называются зависимыми, если для всякого ковектора с положительными координатами зависимы опорные грани этих многогранников, соответствующие ковектору.

Координатная плоскость $\mathbf{R}^I$ в пространстве $\mathbf{R}^n$ называется ненужной для конических многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, если непустые из конических многогранников $\Delta_1^I, \ldots, \Delta_k^I$, где $\Delta_i^I = \Delta_i \cap \cap R^I$, зависимы.

Координатная плоскость $\mathbf{R}^I$ называется коненужной для конических многогранников $\Delta_1, \ldots \Delta_k$, если зависимы конические многогранники в дополнительной координатной плоскости $\mathbf{R}^{I}$, являющиеся проекциями тех из многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, для которых пересечения с плоскостью $\mathbf{R}^I$ пусты.

Сингулярная для набора конических многогранников орбита пространства $\mathbf{C}^n$ называется ненужной, если приписанная орбите координатная плоскость в $\mathbf{R}^n$ — ненужная для этих многогранников. Сингулярная орбита называется недостижимой, если она не является ненужной и приписанная ей координатная плоскость является коненужной. Остальные сингулярные орбиты (для которых соответствующие плоскости независимы и не козависимы) называются достижимыми. Координатная плоскость $\mathbf{R}^I$, приписанная орбите пространства $\mathbf{C}^n$, определяется следующим образом. Орбите соответствует симплициальная грань положительного октанта в $\mathbf{R}^{n*}$. Этой грани двойственен конус в $\mathbf{R}^n$. Максимальное линейное подпространство, содержащееся в этом конусе, мы и называем координатной плоскостью, приписанной орбите.

Переходим к связи разрешения для конических многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ с Δ-невырожденными системами аналитических уравнений с теми же многогранниками Ньютона. Пусть $f_1 = \ldots \ldots = f_k = 0$ — система ростков аналитических уравнений в окрестности точки 0 в $\mathbf{C}^n$ с коническими многогранниками Ньютона $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, X — росток многообразия, определенного этой системой, X_c — пересечение этого ростка с крестом сингулярности для конических многогранников $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Пусть $g: M_{K+} \to \mathbf{C}^n$ — разрешение для этого набора многогранников. Обозначим через X_0 прообраз ростка $X \setminus X_c$ в M_{K+} и через $\overline{X}_0$ — его замыкание в M_{K+}.

Т е о р е м а. При сформулированных ниже почти всегда выполненных условиях на коэффициенты начальных отрезков рядов Тейлора функций f_i справедливы следующие утверждения:

1) $\overline{X}_0$ — росток аналитического многообразия в M_{K+}, трансверсально пересекающий его орбиты;

2) X_0 получается из $\overline{X}_0$ выбрасыванием пересечений с набором трансверсально пересекающихся гиперповерхностей — прообразов креста сингулярности при проекции g;

3) проекция g устанавливает взаимно аналитическое соответствие между X_0 и $X \setminus X_c$;

4) проекция g задает собственное отображение $\overline{X}_0$ на росток многообразия X, из которого выброшены пересечения со всеми орбитами в $\mathbf{C}^n$, недостижимыми для многогранников $\{\Delta_i\}$;

5) утверждения 1)—4) останутся в силе, если под X и X_c понимать части соответствующих аналитических многообразий, лежащие в достаточно малом шаре вокруг точки ноль, под X_0 — прообраз $X \setminus X_c$ и под $\overline{X}_0$ — его замыкание.

Сформулируем условия на коэффициенты, при которых справедлива теорема. Свяжем с координатной плоскостью $\mathbf{R}^I$ систему уравнений $f_1^I = \ldots = f_k^I = 0$, где f_i^I — ограничение f_i на координатную плоскость $\mathbf{C}^I$ в $\mathbf{C}^n$ (ограничения, тождественно равные нулю, не принимаются во внимание). Теорема выполняется для систем уравнений, которые, во-первых, сами Δ-невырождены и, во-вторых, Δ-невырождены все системы $\{f_i^I\}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательствам теорем п. 2.4. и п. 2.6., поэтому мы не будем на нем останавливаться. Отметим интересные частные случаи.

1. Все конические многогранники Ньютона удобны, и, следовательно, крест сингулярности состоит из одной точки 0. В этом случае теорема показывает, что многообразие X имеет изолированную особую точку 0 и предлагает разрешение особенностей $g: M_{K+} \to \mathbf{C}^n$, раздувающее лишь эту точку 0.

2. Крест сингулярности для конических многогранников Ньютона, за исключением точки нуль, содержит лишь ненужные орбиты. В этом случае теорема показывает, что многообразие X имеет изолированную особую точку 0. Разрешение особенностей $g: M_{K+} \to \mathbf{C}^n$ раздувает в $\mathbf{C}^n$ не только точку 0. Однако ограничение g на многообразие $\overline{X}_0$ раздувает лишь особую точку 0 на многообразии X.

3. Крест сингулярности содержит лишь ненужные и достижимые орбиты. В этом случае теорема предлагает неособое многообразие $\overline{X}_0$ вместе с собственной проекцией $g: \overline{X}_0 \to X$, являющейся изоморфизмом на открытом плотном множестве. Этот случай отличается от предыдущего тем, что особая точка 0 многообразия X, вообще говоря, неизолирована. Отображение $g: \overline{X}_0 \to X$ является отображением «на» и изоморфизмом вне собственного аналитического подмножества.

Замечание. В условиях теоремы порядки функций $g^* f_i$ на гиперплоскостях, лежащих в прообразе нуля, определяются при помощи теоремы из п. 2.3. Аналогичным образом определяются и уравнения пересечения многообразия $\overline{X}_0$ с орбитами многообразия M_{K+}, лежащими в прообразе нуля.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-заде С. М.*, Особенности дифференцируемых отображений. Т. I. М., Наука, 1982, 304 с. (РЖМат, 1982, 12А574К)
2. —, —, —, Особенности дифференцируемых отображений. Т. II. М., Наука, 1983

3. *Березовская Ф. С.*, Индекс стационарной точки векторного поля на плоскости. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 2, 77 (РЖМат, 1979, 10А403)
4. *Бернштейн Д. Н.*, Число корней системы уравнений. Функц. анализ и его прил., 1975, *9*, № 3, 1—4 (РЖМат, 1975, 3А350)
5. *Кушниренко А. Г., Хованский А. Г.*, Многогранники Ньютона. Успехи мат. наук, 1976, *31*, № 2, 201—202
6. *Брюно А. Д.*, Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. М., Наука, 1979, 253 с. (РЖМат, 1979, 8Б256К)
7. *Варченко А. Н.*, Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов. Функц. анализ и его прил., *1976, 10, № 3, 13—38 (РЖМат, 1977,* 1А535)
8. *Васильев В. А.*, Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 3, 1—11 (РЖМат, 1978, 1Б585)
9. —, Асимптотика экспоненциальных интегралов в комплексной области. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 4, 1—12 (РЖМат, 1979, 2Б595)
10. *Ганниг Р., Росси X.*, Аналитические функции многих комплексных переменных. М., Мир, 1969, 396 с. (РЖМат, 1969, 9А397К)
11. *Данилов В. И.*, Геометрия торических многообразий. Успехи мат. наук, 1978, *33*, № 2, 85—135 (РЖМат, 1978, 8А452)
12. —, Многогранники Ньютона и исчезающие когомологии. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 2, 32—47 (РЖМат, 1979, 9А587)
13. *Казарновский Б. Я.* О нулях экспоненциальных сумм. Докл. АН СССР, 1981, *257*, № 4, 804—808 (РЖМат, 1981, 8Б125)
14. *Кушниренко А. Г.*, *Многогранник Ньютона и числа Милнора.* Функ. анализ и его прил., 1976, *9*, № 1, 74—75 (РЖМат, 1975, 6А683)
15. —, Многогранники Ньютона и теорема Безу. Функц. анализ и его прил., 1976, *10*, № 3, 82—83 (РЖМат, 1977, 1А322)
16. —, Многогранник Ньютона и число решений системы n уравнений с n неизвестными. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 2, 266—267 (РЖМат, 1975, 8Б723)
17. *Милнор Дж.*, Особые точки комплексных гиперповерхностей, М., Мир, 1971, 128 с. (РЖМат, 1972, 1А920)
18. *Хованский А. Г.*, Многогранники Ньютона и торические многообразия. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 4, 56—67 (РЖМат, 1978, 5А528)
19. —, Многогранники Ньютона и род полных пересечений. Функц. анализ и его прил., 1978, *12*, № 1, 51—61 (РЖМат, 1978, 8А592)
20. —, *Многогранники Ньютона и формула Эйлера—Якоби. Успехи мат.* наук, 1978, *33*, № 6, 245—246 (РЖМат, 1979, 4А630)
21. —, Геометрия выпуклых многогранников и алгебраическая геометрия. Успехи мат. наук, 1978, *34*, № 4, 160—161
22. —, Многогранники Ньютона и индекс векторного поля. Успехи мат. наук, 1981, *36*, № 4, 234 (РЖМат, 1981, 12А574)
23. *Чеботарев Н. Г.*, «Многогранник Ньютона» и его роль в современном развитии математики. Собрание сочинений, т. 3, М. — Л.: издательство АН СССР, 1950
24. *Hovansky A.*, Sur les racines complexes de systèmes d'equations algebriques ayant un petit nombre de monômes. C. r. Acad. Sci., 1981, sér. 1, *292*, № 21, 937—940 (РЖМат, 1982, 1А746)
25. *Kempf G., Knudsen F., Mumford D., Sait-Donat B.*, Toroidal Embeddings I. Lect. notes in Math., 1975, *339*, 309 pp. (РЖМат, 1974, 7А621)
26. *Kouchnirenko A. G.*, Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. Invent. math., 1976, *32*, 1—31 (РЖМат, 1976, 11А661)
27. *Teissier B.*, Variétés toriques et polytopes. — Seminare Bourbaki, 33e année, 1980/81, *n°* 565
28. *Varchenko A. N.*, Zeta-Function of Monodromy and Newton's Diagram. Invent. Math. 1976, *37*, 253—262 (РЖМат, 1977, 7А562)